



TITLE:

計算流体力学の環境問題への応用 (計算流体力学に関わる数理的諸問題)

AUTHOR(S):

河村, 哲也

CITATION:

河村, 哲也. 計算流体力学の環境問題への応用(計算流体力学に関わる数理的諸問題). 数理解析研究所講究録 1996, 974: 208-215

ISSUE DATE:

1996-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60755>

RIGHT:

計 算 流 体 力 学 の 環 境 問 題 へ の 応 用

お茶の水女子大理学部 河村哲也 (Tetuya KAWAMURA)

1 はじめに

最近の電子計算機の飛躍的な性能向上にともなって、スーパーコンピュータを用いなくてもワークステーションや高性能のパーソナルコンピュータを用いてかなりの規模の数値シミュレーションが行えるようになってきた。このような状況のもとで、理学・工学において数値シミュレーションが果たす役割は年々大きくなっている。我々は数値シミュレーションを、流体の流れが関与する地球環境問題に応用することに興味をもっているが、ここではその中で流れによる砂の移動に関する2つの問題に焦点をあて、研究結果を報告する。ひとつは風による砂丘の移動と、植生を用いた砂丘の固定化に関する研究に関する報告であり、乾燥地における環境問題に関連している。もうひとつは砂の上にたとえば橋脚や防砂柵などの構造物がある場合に、それらと流れとの相互作用の数値シミュレーション結果の報告である。

2. 風による砂丘形状の変化と植生の影響 (2次元)

乾燥地や砂漠は世界各地に分布しており、それらの地域での砂による被害は、例えば極端な場合は集落全体が砂に埋もれるなど、深刻なものになっている。日本でも海岸沿岸で砂の移動によって農作物などの被害を受ける地域がある。そこで防砂林をもうけるなど防砂対策がなされている。しかしながら、これらの対策は経験に基づいている場合が多く、より合理的な対策を施すためには風による砂の移動を定量的に見積る必要がある。この種の問題は風洞などを用いた実験を行うのは難しく、また実測などでは種々の要因が複雑に絡み理想的な条件が得にくい上、結果を得るには非常に時間がかかる。このような実験・実測の欠点を補う有力な方法として数値シミュレーションが考えられるが、本研究では乾燥地環境問題への数値シミュレーションの適用の第一歩として、シミュレーションの有効性を調べるため、地表面上の空気の流れを植生を考慮して数値的に解き、さらに空気流による砂の移動を計算することにより砂丘の移動の計算を行った。

流れによる砂の移動の計算を行うため、次の三段階の計算を行う。

- ① 砂の表面上の流れの計算。
- ② 砂表面上に働く摩擦応力により移動される砂の量の計算
- ③ 砂の移動による砂の表面形状の変化の計算

最後のステップにより領域形状が変化しそのために流れも変化するので、実際の計算では初期状態から始めて、上述の各ステップを必要な時間まで順次繰り返すことになる。以下各ステップについて概略の説明を行う。なお簡単のため現象の二次元性を仮定した。

2. 1 基礎方程式

(a) 流れの計算

支配方程式は連続の式およびNavier-Stokes方程式であり、

$$u_x + v_y = 0 \quad (1)$$

$$Du/Dt = -p_x/\rho + (\nu u_x)_x + (\nu u_y)_y - cVu \quad (2)$$

$$Dv/Dt = -p_y/\rho + (\nu v_x)_x + (\nu v_y)_y - cVv \quad (3)$$

$$(D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2})$$

と表される。植生による抵抗は(2), (3)の右辺最終項に外力として組み込まれている。ただしCは抵抗係数であり、本研究では単純に植生のある部分では正の定数とし、無い部分では0とした。

ν は粘性係数であり、層流計算の場合は定数とし、乱流計算の場合は簡単のため混合距離モデル

$$\nu = \rho l^2 |U_Y| \quad (4)$$

ただし

$$l = 0.4Y(1 - \exp(-YU_\tau/26\nu_0)), \quad U_\tau = \nu\sqrt{U_Y} \quad (5)$$

を用いた。ただしUは砂表面に沿った方向の速度、Yは砂表面からの垂直距離で、Yに関する微分は砂表面に垂直方向に行うものとする。また ν_0 は動粘性係数である。

(b) 砂の輸送

摩擦速度 U_τ から砂の輸送量 q ($g/cm \cdot sec$)を見積る公式は、実験や簡単なモデルに関する考察からいくつかの関係式が提案されている。それらは、二次元の場合、砂が移動しはじめるのに必要な摩擦速度を U_0 とすると、A, Bを適当な係数として

$$q = AU_\tau(U_\tau^2 - U_0^2) \quad (6)$$

$$q = BU_\tau^2(U_\tau - U_0) \quad (7)$$

の形をしている[1][2]。いずれにせよ $U_\tau \gg U_0$ のとき

$$q = AU_\tau^3, \quad q = BU_\tau^3 \quad (8)$$

となるので、本研究ではCを適当な定数として、

$$q = CU_\tau^3 \quad (9)$$

を採用した。

(c) 地形の変化

地表面に沿う方向を ξ とし、 h を地表面に垂直な方向に測った距離とする。地表面に沿って微小区間をとって考えると、 h の時間変化は区間の両端での q の変化によりもたらされる。すなわち ρ_0 を砂の密度とすると

$$\rho_0(dh/dt) = -dq/d\xi \quad (10)$$

が成り立つ。この式を用いることにより h を決定することができる。

砂は表面の傾斜角が大きくなるとすべり落ちるため、表面の傾斜角には最大値がある（安息角とよばれおおよそ 32° ）。したがって上式を用いて表面を決定したのち傾斜角が安息角を越えた場合には、砂の質量が保存されるように考慮しながら、傾斜角が安息角になるように人工的に表面形状を変化させる必要がある。

2. 2 計算方法

連続の式が厳密に満足される流れ関数（ ϕ ）－渦度（ ω ）法を用いた。すなわち、 x 方向、 y 方向の運動方程式をそれぞれ y 、 x で微分して差をとり式を多少変形すると渦度 $\omega = uy - vx$ の輸送方程式

$$\omega_t + (\psi_y - 2\nu_x)\omega_x - (\psi_x + 2\nu_y)\omega_y = \nu(\omega_{xx} + \omega_{yy}) - (\nu_{xx}\psi_{xy} + 2\nu_{xy}\psi_{xy} + \nu_{yy}\psi_{yy}) \quad (11)$$

が得られる。ここで ω と ϕ の間には

$$\omega = -(\psi_{xx} + \psi_{yy}), \quad (u = \psi_y, v = -\psi_x) \quad (12)$$

の関係がある。なお砂表面に沿った座標を用いるのが便利であるので一般座標変換

$$x = x(\xi, \eta, t), \quad y = y(\xi, \eta, t) \quad (13)$$

を用いて基礎方程式を書換えた上で差分計算を行う。このとき、偏微分間には次の変換関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} f_x &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,t} = (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta) / J \\ f_y &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x,t} = (x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi) / J \\ f_t &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{x,y} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_{\xi,\eta} - \frac{1}{J} (y_\eta f_\xi - y_\xi f_\eta) \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)_{\xi,\eta} \\ &\quad - \frac{1}{J} (x_\xi f_\eta - x_\eta f_\xi) \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \right)_{\xi,\eta} \end{aligned}$$

これらの関係式を (11), (12) に代入した式が計算に用いる基礎方程式になる。

差分格子は地表面と直交するのが望ましい。一方、境界形状は各時間ステップごとに变化するため、各時間ステップごとに格子生成を行う必要がある。そこで

本研究では、少なくとも地表面近くで比較的短時間で直交格子が生成できる代数型の格子生成を行った。図1に本計算で用いた典型的な格子の一部を示す。

本研究では以下の順で計算を行った。はじめに初期の地形のデータを用いて、地形を変形させずに(11), (12)を座標変換した式を十分長い時間ステップ(定常解がある場合には定常解が求まるまで)計算する。なおこの計算での初期条件は一様流とし、流入側の境界条件は一様流の条件、地表面では粘着条件(速度0)を ϕ , ω で表現した条件を課した。その他の遠方境界では ϕ と ω は外挿から決めた。次に得られた解を初期条件として同じ境界条件のもとで順次(10)を用いて境界形状を変化させながら(11), (12)を変数変換した式を解いた。その際、前述のとおり格子は各時間ステップごとに生成しなおした。

基礎方程式の差分化は、時間に関する微分には前進差分を、空間に関する微分は中心差分を用いた。(11)のポアソン方程式を変数変換したはSOR法を用いて解いた。

2. 3 計算結果

以下に、上記の方法で実際に計算したひとつの計算例として、図2に示すような初期に二等辺三角形(底角 $=25^\circ$)断面をもった地形が風によりどのように移動するか、また植生によって移動の様子がどのように影響を受けるかについての結果を示す。図2(a)は初期の格子であり、二等辺三角形の底辺の長さを1としたとき境界は左側は三角形の左端から3、右側は三角形の右端から4、上側は2.7の距離に位置している。風は左端からX軸に平行な一様流(大きさ1)として流入するとしている。格子は全体で 61×31 であり、図に示すように地表面および三角形の近くで細くなるようにとっている。植生がある場合の計算では、図2(b)に示した格子の部分に植生があるとして計算した。ただし(2), (3)の定数 c は2.5とした。図3はこの格子を用いた計算結果であり、定常状態での速度ベクトルが示されている。図3(a)は植生のない場合、図3(b)はある場合である。

図3に示されている計算結果を初期条件に用いて、砂による地形変化を考慮した計算結果(速度ベクトル図)を図4に示す。図4(a)は植生のない場合、図4(b)は植生のある場合であり、同じ位置から計算を始めて同じ時間経過したときの結果を示している。ただし(6)の係数 A は0.1と選んだ。図に示すように長時間の計算の結果、植生のある場合の方が砂丘の移動が遅れるなど結果に顕著な差がみられる。なお風下側の砂丘の傾斜角は安息角になっていることがわかる。

3 流れによる砂の移動(3次元)

本研究では砂の上に建てられた構造物と流れおよび砂の移動がどのように関連するかを調べた。例えば、橋脚と川底の砂の移動との関係や防砂柵や防砂林と砂の移動の関係あるいは少しパラメータを変えれば防雪柵と雪の関係などがこの研究である程度明らかになると考えられる。具体的にはとりあえず砂に円柱が立てられている場合の計算を行った。計算方法は2と同様であるが、3次元計算を必要とする点が異なっている。

3. 1 基礎方程式

三次元計算には標準的なMAC法を用いた。すなわち、速度場は運動方程式を陽的に時間発展させた式

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t \left(- (v^n \cdot \nabla) v^n - \text{grad } p^{n+1} + \frac{1}{Re} \Delta v^n \right)$$

を用いて求める。ただし、圧力場はこの方程式の発散をとった式に、次の時間ステップで連続の式が成り立つとして $\text{div } V^{n+1} = 0$ を代入して得られる圧力のポアソン方程式

$$p_{zz} + p_{yy} = -((u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 + 2(u_y v_x + v_x w_y + w_x u_z)) + D/\delta t + (D_{zz} + D_{yy} + D_{xx})/Re) \quad (14)$$

$$(D = u_x + v_y + w_z)$$

をSOR法を用いて解いて求める。ただし実際の計算にはこれらの式を一般座標変換

$$x = x(\xi, \eta, \zeta, t), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta, t), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta, t) \quad (15)$$

を用いて変換した式を用いる。なお現在はテスト計算の段階であるため、三次元の場合は層流計算のみを行っている。得られた計算結果から摩擦速度

$$U_\tau = \nu \sqrt{U_z}, \quad V_\tau = \nu \sqrt{V_z}$$

を計算する。ただしU、Vは砂表面に沿った方向のx、y方向の速度成分、z方向の微分は砂表面から垂直方向にとる。次にこれらの摩擦速度から砂のx、y方向の移動量

$$q_x = c(U_\tau)^3, \quad q_y = c(V_\tau)^3 \quad (16)$$

を計算する。さらに砂の表面形状は

$$\rho_0(dh/dt) = -\text{div } q \quad (17)$$

から決める。なおテスト計算の段階であるため格子は境界と直交させていない。

3. 3 計算例

はじめに計算方法の確認のため、円柱（一部分）の断面をもった砂丘が軸と垂直方向に吹く風によってどのように移動するかを調べた結果を図5に示す。図において(a)は砂丘を固定した場合の流れ（速度場）を、(b)は(a)の結果を初期条件に用いて砂丘を適当な時間ステップ移動させたあとの計算結果である。なおレイノルズ数は200として層流計算を行った。

次に砂面上に立てられた円柱まわりの流れの計算例を図6、7、8に示す。図6は砂に直角の場合の計算結果であるが、図7、8は傾斜して立てられた場合の計算結果である。砂の面を平面とした場合に面の法線と円柱軸とのなす角度を傾斜角と呼ぶことにすれば、図7、8は傾斜角が30°でそれぞれ上流および下流側に傾いている場合の計算結果である。この場合も(a)は砂を固定した計算（対

称断面内の速度場)であり、(b)は(a)を初期条件にして砂を移動させた結果である。図6、7(a)において円柱前縁と砂面の境界部分にはっきりと馬蹄形渦が確認される。これは上流傾斜の場合がいちばん顕著であり、続いて垂直、下流傾斜の順になっている。そして馬蹄形渦の影響のため、この順で円柱前面の砂が強く掘られている様子が各図の(b)で見てとれる。砂面上に杭を立てておくと風上側に倒れることが知られているが、この現象は前面が掘られて杭が前方に傾き始めれば、ますます強く掘られ傾きが増すためだと考えられる。図9は砂面の高さの等高線を描いた図であるが、後流部に砂が積もってもりあがる領域の広さが上流傾斜、垂直、下流傾斜の順に徐々に広がっている。

4. まとめと今後の課題

本研究では風による砂丘の移動および植生が移動へ及ぼす影響を数値シミュレーションを用いて調べた。さらに構造物がある場合の流れとの砂面との相互作用についても調べた。本研究で用いた砂の移動量に関する簡単なモデルは十分なものとはいえず、また用いたパラメーターも適当に定めたものであるが、砂丘の移動や植生の影響および構造物との相互作用の定性的な性質を知ることができ、シミュレーションの可能性を示すことができた。今後の課題として植生による抵抗や砂の輸送モデルの精密化や3次元計算での乱流モデルの検討など考えられるが、これらは現在研究中である。またより現実的に重要なグローバルなスケールでの長時間にわたる3次元計算を行い、乾燥地環境問題への基礎的なデータの蓄積も行う予定である。また環境問題とは直接には関係しないが、スケールの小さな現象として風紋の発生、発達の問題にも本研究で用いた計算法は役立つものと考えられる。

参考文献

- [1]土屋 漂砂量則について、水工学シリーズ86-B-4
(1986) pp303-307
- [2]Fryberger, S. G. Dune forms and wind regime, A study of global sand seas, NASA Geological survey
professional paper 1052 (1979) pp1-19.

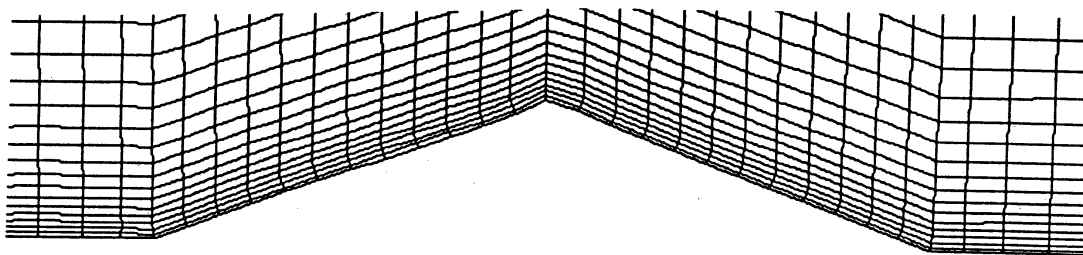
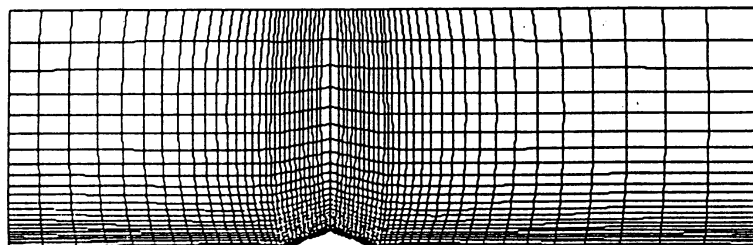


図1 計算に用いた格子の例 (砂丘近く)

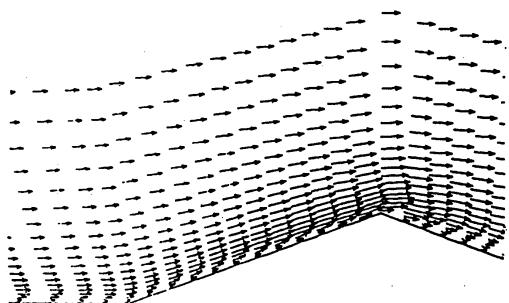


(a)

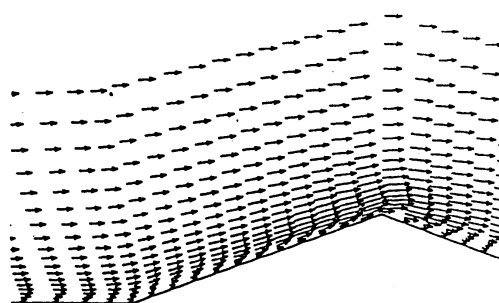


(b)

図2 (a)初期格子 (b)植生の位置

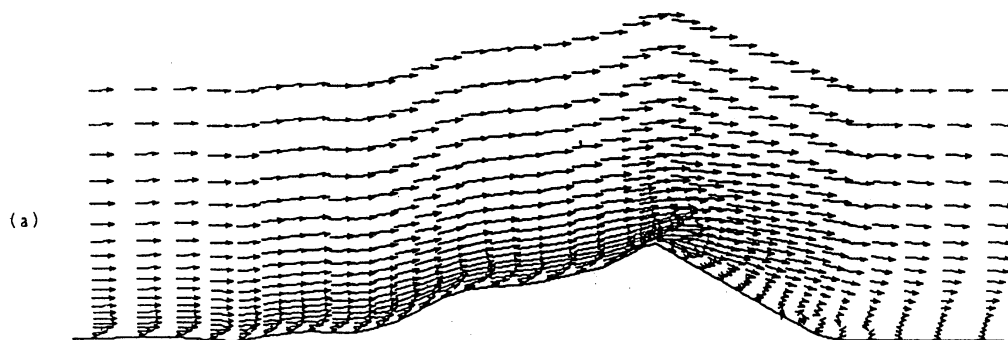


(a)

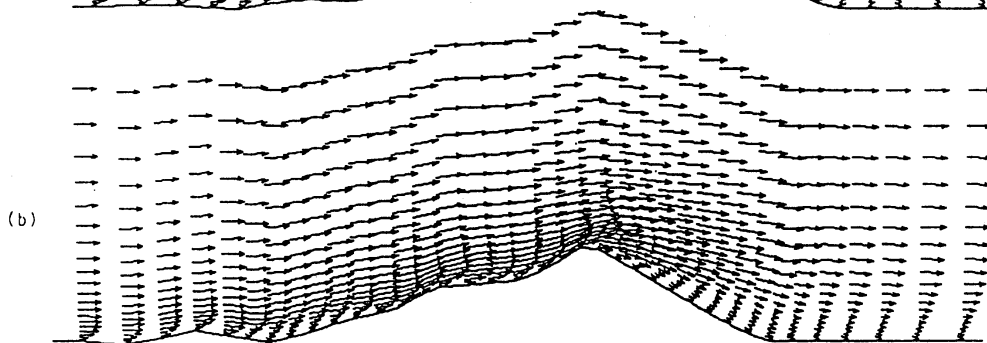


(b)

図3 初期の速度分布 (a)植生のない場合 (b)植生のある場合



(a)



(b)

図4 一定時間経過後の砂丘形状と速度分布 (a)植生のない場合 (b)植生のある場合

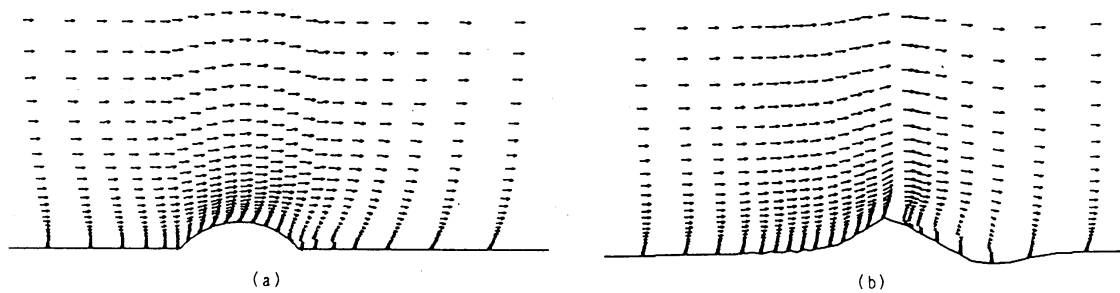


図5 円形形状の砂丘の移動 (a)砂の移動前 (b)砂の移動後

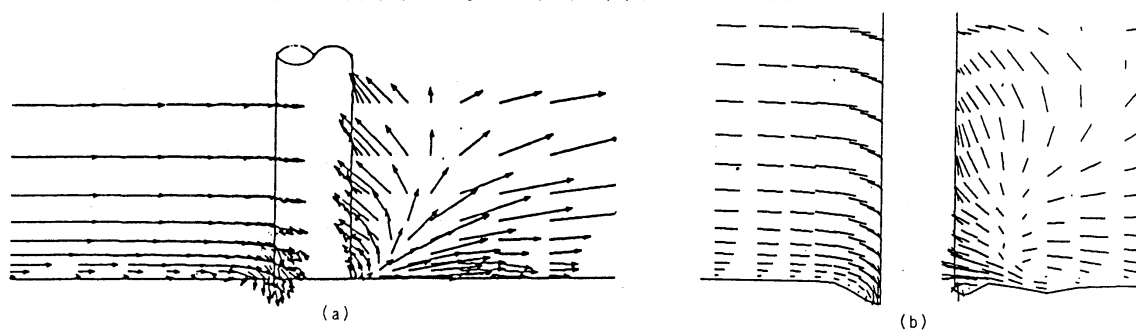


図6 垂直円柱まわりの流れ (a)砂の移動前 (b)砂の移動後

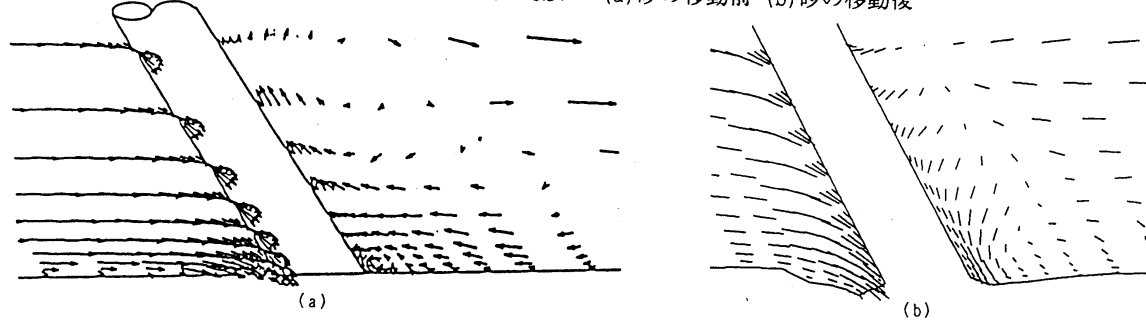


図7 上流傾斜円柱まわりの流れ (a)砂の移動前 (b)砂の移動後

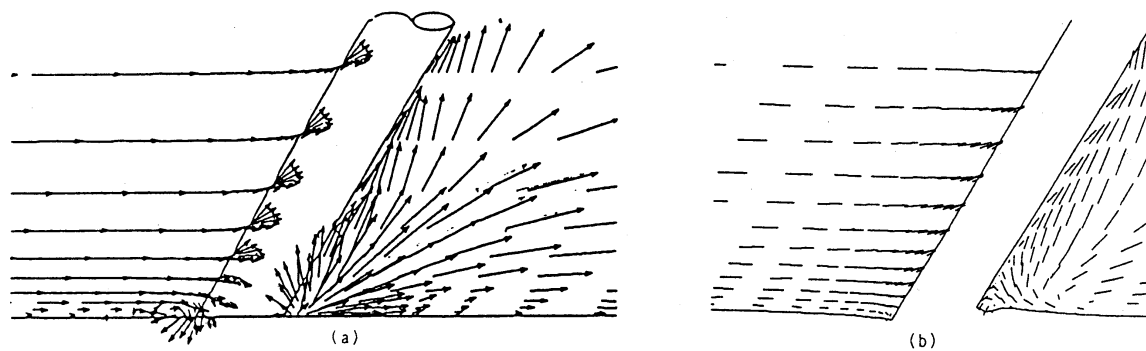


図8 下流傾斜円柱まわりの流れ (a)砂の移動前 (b)砂の移動後

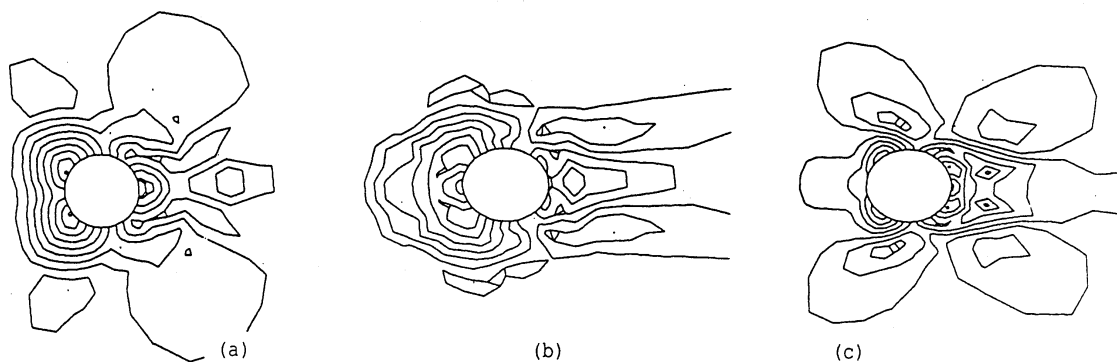


図9 砂面の等高線 (a)垂直円柱(b)上流傾斜円柱(c)下流傾斜円柱